ANALISIS MATEMATICO II

NOMBRE:

FECHA:

CURSO:

26-11-25

Prof. Sola

T1) Enuncie el teorema de Green y a partir de este deduzca la formula para calcular el área de una región del plano encerrada por una curva suave, simple y cerrada C, con esta fórmula calcule el área de un semi circulo de radio "r"

T2) Enuncie el teorema de cambio de variable para integrales dobles y utilícelo para calcular el área limitada por $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq 2x$, $y \geq 0$

E1) Calcule el flujo del campo $\bar{f}\ (x, y, z) = (yz, y^2 + x, e^x y)$ a través de la frontera del cuerpo H: $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, $y \geq 0$

E2) Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región triangular de vértices (-2,4) , (0,0) , (2,4), suponiendo que la densidad de masa en cada punto P $\in R^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen

E3) Calcular el flujo de $f(x, y, z) = (x + 4z^2, y + 2xz, 2z)$ a través de la superficie del cuerpo definido por $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $z \geq x^2 + y^2$

E4) Hallar la circulación del campo $\bar{f}(x, y, z) = (yz + 3x^2z + y; x + z^2; x^3 + 2yz)$, a lo largo de la curva intersección entre las superficie

$x^2 + y^2 + z^2 = 2\ con\ y = \sqrt{x^2 + z^2}$ .Graficar la curva indicando claramente la orientación elegida para la misma.

AM 2	2° parcial Prof. Sola	HOJA N° 1/3 FECHA 26-11-25

(T1) Enunciar el t. de Green y, a partir de éste, deducir la fórmula para calcular el área de una región del plano encerrada por una curva suave, simple y cerrada C. Con esta fórmula calcular el área de un semicírculo de radio r

Sean: C una curva suave, simple y cerrada

D una región compacta de $\mathbb{R}^2$, $C = \partial D$ (frontera)

$\bar{f} = (P, Q)$ $\bar{f} \in C^1$

$\Rightarrow$ T. Green: $\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$

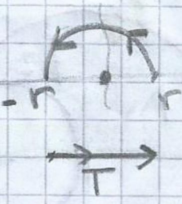
$A_D = \iint_D dx\,dy \Rightarrow$ si $Q'_x - P'_y = 1$ se puede utilizar el T. Green para hallar el área encerrada por C

si $\bar{f}_{(x,y)} = (0, x) \Rightarrow \begin{matrix} P'_y = 0 \\ Q'_x = 1 \end{matrix}$ cumple

NO es variable

$C: \bar{\gamma}_{(t)} = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$ $t \in [0, \pi]$

$T: \bar{\beta}_{(t)} = (t, 0)$ $t \in [-r; r]$



$C \cup T$ es curva borde del semicírculo

$\oint_{C \cup T} \bar{f}\, d\bar{l} = \int_C \bar{f}\, d\bar{l} + \int_T \bar{f}\, d\bar{l}$ con $\bar{f}_{(x,y)} = (0, x)$

$A_S = \iint_D dx\,dy \overset{\text{Green}}{=} \int_C \bar{f}\, d\bar{l} + \int_T \bar{f}\, d\bar{l} = \int_C \bar{f}(\bar{\gamma}_{(t)})\, \bar{\gamma}'_{(t)}\, dt + \int_T \bar{f}(\bar{\beta}_{(t)}) \cdot \bar{\beta}'_{(t)}\, dt =$

$= \int_0^{\pi} (0, r\cos(t))(-r\,\mathrm{sen}(t), r\cos(t))\, dt + \int_{-r}^{r} (0, t)(1, 0)\, dt =$

$= \int_0^{\pi} r^2\cos^2(t)\, dt + 0 = r^2 \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{A = \frac{\pi r^2}{2}}$

NOTA

(12) Enunciar el T. de cambio de variables para integrales dobles y utilizarlo para calcular el área limitada por $x^2+y^2 \leq 4$, $x^2+y^2 \geq 2x$, $y \geq 0$

Sean D y D^* regiones elementales del plano

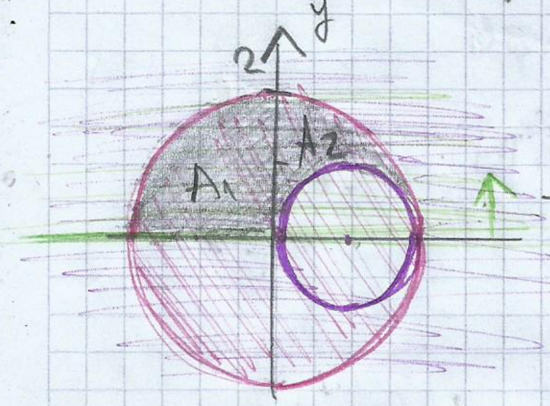
T una transformación C^1 / $T_{(u,v)} = (x_{(u,v)}, y_{(u,v)})$

Entonces

$$\iint_D f(x,y)\, dx\,dy = \iint_{D^*} f(T_{(u,v)})\, |J|\, du\,dv$$

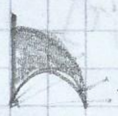
$$\underbrace{|J|}_{\text{determinante}} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$

Área delimitada por $x^2+y^2 \leq 4$, $\underbrace{x^2+y^2 \geq 2x}_{(x-1)^2+y^2 \geq 1}$, $y \geq 0$



$\rightarrow$

$A_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi 2^2}{4} = \boxed{\pi = A_1}$



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

↳ radio: va de la circ. desplazada hasta la circ. centrada

$A = A_1 + A_2$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2 = r^2\cos^2(t) + r^2\text{sen}^2(t) = r^2\underbrace{(\cos^2+\text{sen}^2)}_{1}$$

$x^2+y^2 = r^2$

$x^2+y^2 \leq 4$ $x^2+y^2 \geq 2x$

$r^2 \leq 4$ $r^{\cancel{2}} \geq 2r\cos(t)$

$r \leq 2$ $2\cos(t) \leq r \leq 2$

$$A_2 = \iint_{A_2} dx\,dy \overset{\text{C.V.}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_{2\cos(t)}^{2} \overset{\text{Jac}}{r}\, dr\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big|_{2\cos(t)}^{2} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - 2\cos^2(t)\, dt = \boxed{\frac{\pi}{2} = A_2}$$

$A = \pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}\pi}$

NOTA

AM2	2° parcial Prof. Sola	HOJA N° 2/3 FECHA 26-11-25

E1 Calcular el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z) = (yz,\ y^2+x,\ e^x y)$ a través de la frontera del cuerpo $H: 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ y \ge 0$

Sup. frontera $\Rightarrow$ Flujo $\Rightarrow$ Uso T. Gauss

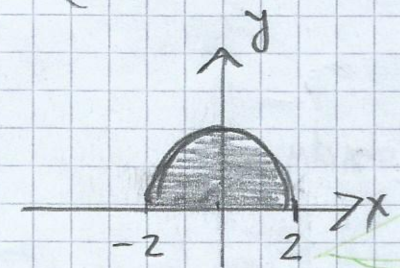
$\bar{f} \in C^1$ ✓ H región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es S

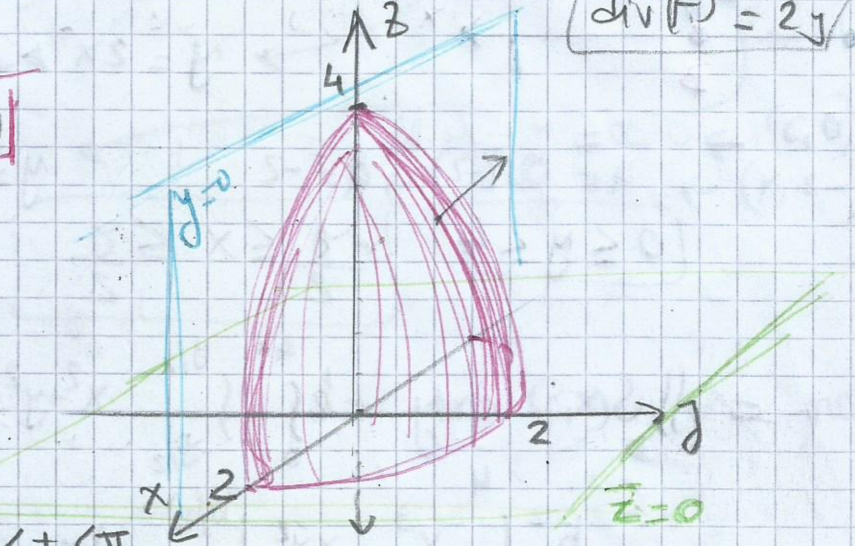
$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_H \operatorname{div}(\bar{f})\, dvol$

$\bar{f} = (P, Q, R) \rightarrow \operatorname{div}(\bar{f}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + 2y + 0$

$\boxed{\operatorname{div}(\bar{f}) = 2y}$

$$H: \begin{cases} \boxed{0 \le z} \\ \boxed{z \le 4 - (x^2+y^2)} \\ y \ge 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$0 \le t \le \pi$

$0 \le r \le 2$

$0 \le z \le 4 - r^2$

$$\oint\!\!\oint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_H 2y\, dx\,dy\,dz \overset{c.v.}{=} 2\int_0^{\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} \overset{\text{Jac}}{r}\, \underbrace{(r\,\mathrm{sen}(t))}_{y}\, dz\, dr\, dt$$

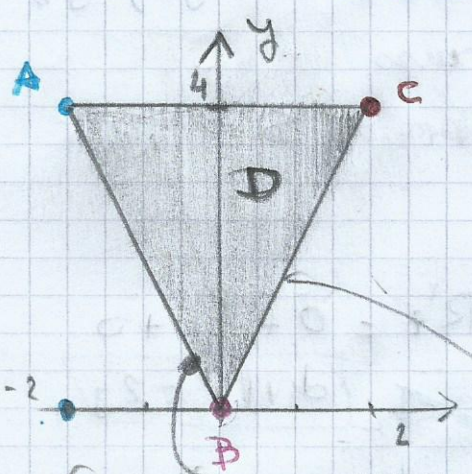
$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2} r^2\,\mathrm{sen}(t)\,(4-r^2)\, dr\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2} 4r^2\,\mathrm{sen}(t) - r^4\,\mathrm{sen}(t)\, dr\, dt = 2\int_0^{\pi} \frac{32}{3}\mathrm{sen}(t) - \frac{32}{5}\mathrm{sen}\,t\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{64}{15}\mathrm{sen}(t)\, dt = \frac{128}{15}\cdot 2 = \frac{256}{15}$$

NOTA

E2) Calcular la masa de una chapa plana que ocupa la región triangular de vértices $\underbrace{(-2,4)}_{A}$, $\overbrace{(0,0)}^{B}$, $\underbrace{(2,4)}_{C}$ suponiendo que la densidad en cada punto $P \in \mathbb{R}$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen



densidad proporcional al cuadrado de la distancia al origen

$$\delta(x,y) = k(x^2+y^2)$$

$y = ax+b$

$(0,0) \to 0 = b$

$(2,4) \to 4 = a2 \to a = 2$

$\to y = 2x \to \boxed{x = y/2}$

$(0,0) \to 0 = b$

$(-2,4) \to 4 = a(-2) \to a = -2$

$\to y = -2x \to \boxed{x = -y/2}$

$$\boxed{0 \le y \le 4} \quad \boxed{-\frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2}}$$

$$\text{Masa} = \iint_D \delta(x,y)\,dxdy = k\int_0^4 \int_{-y/2}^{y/2} x^2+y^2\,dx\,dy =$$

$$= k\int_0^4 \frac{x^3}{3} + xy^2 \Big|_{-y/2}^{y/2} dy =$$

$$= k\int_0^4 \frac{(y/2)^3}{3} + \frac{y}{2}y^2 - \frac{(-y/2)^3}{3} - \left(\frac{-y}{2}\right)\cdot y^2\,dy =$$

$$= k\int_0^4 \frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{2}\,dy = k\underbrace{\int_0^4 \frac{13}{12}y^3\,dy}_{\frac{208}{3}}$$

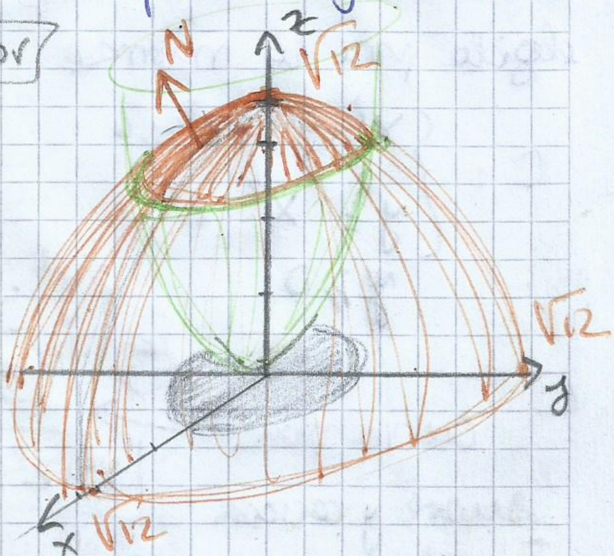
$$\boxed{\text{Masa} = \frac{208k}{3}}$$

NOTA

AM2	2° parcial — Prof Sola	HOJA N° 3/3 — FECHA 26-11-25

E3) Calcular el flujo de $\bar{F}(x,y,z) = (x+4z^2,\ y+2xz,\ 2z)$ a través de la sup. ~~del cuerpo~~ definida por $x^2+y^2+z^2=12$
$z \geqslant x^2+y^2$

(debe ser un error)



$$\begin{cases} \boxed{x^2+y^2+z^2=12} & \rightarrow \text{esfera} \\ \underbrace{x^2+y^2 \leq z}_{z \geq 0} & \longrightarrow \text{paraboloide} \end{cases}$$

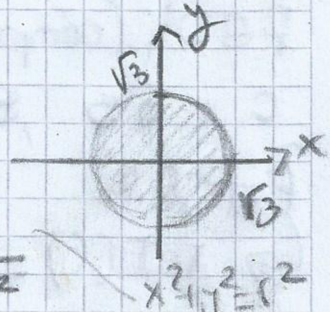
Hallo la intersección de las sup. para analizar la proyección

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=12 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \rightarrow \underbrace{z^2+z=12}$$

$z=3$

~~$z=-4$~~

en $z=3$
$x^2+y^2 \leq 3$



$\boxed{T: \text{disco en } z=3 \text{ radio } \sqrt{3}}$

$$\begin{cases} x=r\cos(t) \\ y=r\,\text{sen}(t) \\ z=\sqrt{12-r^2} \end{cases}$$

$S \cup T$ sup. frontera de W

$$\underbrace{\oiint_{S\cup T} \bar{F}\, d\bar{s}}_{\times \text{Gauss}} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} + \iint_T \bar{F}\, d\bar{s}$$

$$\text{div}(\bar{F}) = 1+1+2=4$$

$$\boxed{\oiint_{S\cup T} \bar{F}\, d\bar{s}} = \iiint_W \text{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz = \iiint_W 4\, dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{\text{c.V.}}{=} 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_3^{\sqrt{12-r^2}} \underbrace{r}_{\text{Jac}}\, dz\,dr\,dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{12-r^2}-3\right) dr = 8\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{12-r^2}\, dr - 3\int_0^{\sqrt{3}} dr\right] =$$

$$= 8\pi\left(-\frac{\sqrt{12-r^2}^{\,3}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3}\right) = \boxed{8\pi\left(-9+8\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)}$$

$$\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} (x+4z^2,\ y+2xz,\ 2z)\cdot(0,0,-1)\, dx\,dy = \iint_{T_{xy}} -2z\, dx\,dy \overset{z=3}{=}$$

$$= -6\underbrace{\iint_{T_{xy}} dx\,dy}_{\text{Área}_{T_{xy}}} \xrightarrow{\pi\cdot\sqrt{3}^2} \boxed{\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = -18\pi}$$

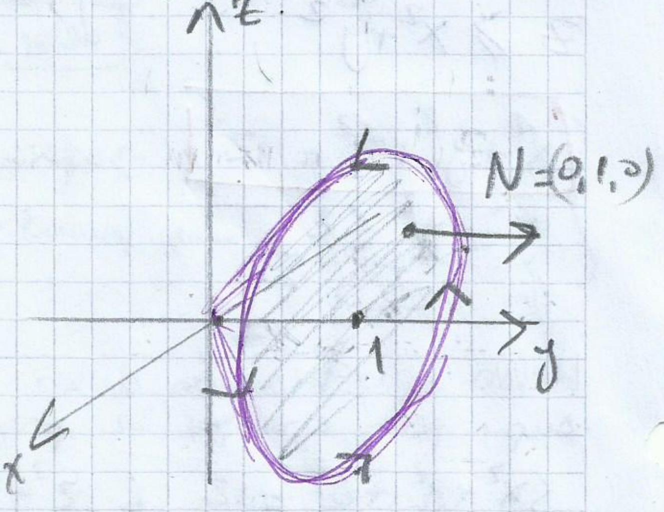
$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = 8\pi\left(5\sqrt{3}-9\right) + 18\pi = \boxed{\left(-54+40\sqrt{3}\right)\pi = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s}}$$

NOTA

(E4) Hallar la circ. del campo $\bar{f}(x,y,z) = (\overbrace{yz + 3x^2z + y}^{P} ; \overbrace{x + z^2}^{Q}, \overbrace{x^3 + 2yz}^{R})$ a lo largo de la curva intersección entre las superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{con} \quad y = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Graficar la curva indicando, claramente, la orientación elegida para la misma.



$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y^2 = x^2 + z^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$2y^2 = 2$

$\boxed{y = 1}$

curva plana $\boxed{x^2 + z^2 = 1}$

suave y cerrada

$\bar{F} \in C'$ (componentes polinómicas)

$C = \partial S$, S sup orientable $\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{f})\, d\bar{S}$

$\bar{f} = (P, Q, R)$

$\hookrightarrow \text{rot}(f) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$

$$(2z - 2z, y + 3x^2 - 3x^2, 1 - z - 1) = \boxed{(0, y, -z) = \text{rot}(\bar{f})}$$

$$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_{S_{xz}} \text{rot}(\bar{f})\, N\, dx\,dz = \iint_{S_{xz}} (0, y, -z)\,(0,1,0)\, dx\,dz =$$

$$= \iint_{S_{xz}} y\, dx\,dz \overset{y=1}{=} \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xz}} dx\,dz}}_{\text{Área}} = \pi$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \pi}$$